Pismeni ispit iz Diferencijalne geometrije, 06.09.2013. (ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte, obavezno navesti formulu koju koristite i značenje simbola iz napisane formule)

1. (40%)(a) Data je kriva $\vec{r} = \left\{\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\right\}$. Pokazati da je ugao između tangente i vektora položaja dodirne tačke prav.

(60%)(b) Data je kriva $\vec{r} = \left\{\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \ln(\sin t)\right\}$. Odrediti ortove prirodnog triedra date krive. Odrediti fleksiju u proizvoljnoj tački krive.

2. Na cilindru

$$y = x^3$$

odrediti krivu L tako da oskulatorna ravan u proizvoljnoj tački krive L prolazi kroz projekciju N tačke M na osi $0y$.

3. (40%)(a) Pokazati da su površi $x^2 + y^2 + z^2 = x$ i $x^2 + y^2 + z^2 = y$ ortogonalne.

(60%)(b) Pokazati da sve tangentne ravni na površ

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

prolaze kroz stalnu tačku.

4. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u \sin v,\ u \cos v,\ v).$$

(a) Naći prvu kvadratnu formu površi.

(b) Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \leq u \leq \operatorname{sh} v,\ 0 \leq v \leq v_0.$$

Izračunati površinu i dužine strana trougla.

(#) Data je kriva $\vec{r} = \{\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\}$.

Pokazati da je ugao između tangente i vektora položaja dodirne tačke prav.

Rj.

Vektor pravca tangente je $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$.

$$\vec{t} = \ldots = (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$$

Vektor položaja dodirne tačke je

$$\vec{r} = (\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\}.$$

$$\vec{r} \cdot \vec{t} = -\sin 2t \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t \cos 2t + \sin t \cos t =$$

$$= -(2\sin t \cos t)\cos^2 t + \frac{1}{2}(2\sin t \cos t)(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$+ \sin t \cos t =$$

$$= -2\sin t \cos^3 t + \sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + \sin t \cos t$$

$$= -\sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + \sin t \cos t$$

$$= -\sin t \cos t\,(\cos^2 t + \sin^2 t - 1) = 0$$

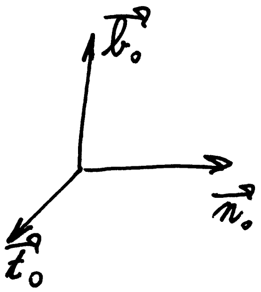
$\vec{r} \cdot t = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{t} \Rightarrow$ ugao između tangente i dodirne tačke je prav

Data je kriva

$$\vec{r} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \ln \sin t \right\}$$

Odrediti ortove prirodnog triedra date krive.
Odrediti fleksiju u proizvoljnoj tački krive.

Rj.:



prirodni triedar

Znamo da vrijedi

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}$$
$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$$
$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

Ortovi prirodnog triedra su određeni relacijama

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}, \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\dot{\vec{r}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \overset{\operatorname{ctg} t}{\frac{\cos t}{\sin t}} \right\} \Rightarrow \vec{t} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sin t} \right\}$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{1}{|\sin t|}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left\{ 0, 0, -\frac{1}{\sin^2 t} \right\}$$

$$\dddot{\vec{r}} = \left\{ 0, 0, \frac{2\cos t}{\sin^3 t} \right\}$$

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \operatorname{ctg} t \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sin^2 t} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 t}, +\frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 t}, 0 \right)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{2\sin^4 t} + \frac{1}{2\sin^4 t}}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 t} & \frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 t} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sin t} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin^3 t}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}\sin^3 t}, -\frac{1}{2\sin^2 t} - \frac{1}{2\sin^2 t} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin^3 t}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}\sin^3 t}, -\frac{1}{\sin^2 t} \right)$$

$$|\vec{n}|^2 = \frac{1}{2\sin^6 t} + \frac{\cos^2 t}{2\sin^6 t} + \frac{1}{\sin^4 t} = \frac{1 + \cos^2 t + \sin^2 t}{2\sin^6 t}$$

$$= \frac{1}{\sin^6 t} \Rightarrow |n| = \frac{1}{|\sin t| \sin^2 t}$$

Prema tome

$$\vec{t}_0 = |\sin t| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{ctg} t \right)$$

$$\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

$$\vec{n}_0 = \frac{|\sin t|}{\sqrt{2}} (\operatorname{ctg} t, \operatorname{ctg} t, -\sqrt{2})$$

orto-vi prirodnog triedra

Fleksiju možemo izračunati po formuli

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$|\dot{\vec{r}}| = \frac{1}{|\sin t|}$$

$$K = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\sin^2 t |\sin t|}} = |\sin t|$$

fleksija krive

Na cilindru

$$y = x^3$$

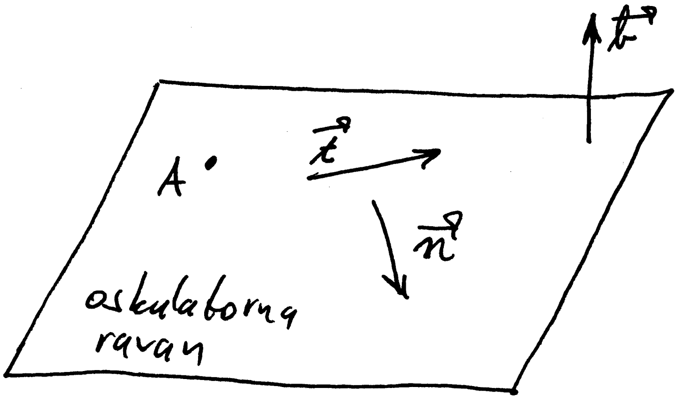
odrediti krivu L tako da oskulatorna ravan u proizvoljnoj tački krive L prolazi kroz projekciju N tačke M na osi Oy.

Rj. Jednačina tražene krive L u vektorskom obliku je

$$\vec{r} = \{x,\ x^3,\ f(x)\}$$

gdje f-ju $f(x)$ treba odrediti iz uslova da oskulatorna ravan krive L u tački $M(x, x^3, f(x))$ prolazi kroz tačku $N(0, x^3, 0)$.

Projekcija (misli se na ortogonalnu projekciju) proizvoljne tačke $P(x,y,z)$ na y-osu je $P'(0,y,0)$



Jednačinu oskulatorne ravni možemo odrediti po formuli

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) = 0$$

U ovom slučaju biće (ako za parametar uzmemo t umjesto x)

$$\begin{vmatrix} x-t & y-t^3 & z-f(t) \\ 1 & 3t^2 & f'(t) \\ 0 & 6t & f''(t) \end{vmatrix} = 0$$

ili

ili

$$(x-t)(3t^2 f'' - 6tf') - f''(y-t^3) + 6t(z-f) = 0$$

Da bi ova ravan prolazila kroz tačku $N(0,t^3,0)$ mora biti

$$-t(3t^2 f'' - 6tf') - 6tf = 0$$

odnosno

$$t^2 f'' - 2tf' + 2f = 0 \qquad \ldots (1)$$

Ovo je Eulerova diferencijalna jednačina po nepoznato; f-ji $f(t)$. Jednačina ima partikularni integral oblika $f(t) = t^r$. Diferenciranjem nalazimo da je

$$f' = r t^{r-1} \quad ; \quad f'' = r(r-1)t^{r-2}$$

Zamjenom u (1) izraza za f-ju i njene izvode imamo

$$x^r(r^2 - 3r + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

i

$$f(t) = C_1 t + C_2 t^2$$

Dakle, jednačine krive L su

$$y = t^3, \quad z = C_1 t + C_2 t^2$$

(#) Pokazati da su površi: $x^2+y^2+z^2=x$
$x^2+y^2+z^2=y$

ortogonalne.

Rj.

$$x^2+y^2+z^2=x$$
$$x^2-x+y^2+z^2=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2=y$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}$$

Ovo su dvije sfere poluprečnika $\frac{1}{2}$ sa centrom u tački $A\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ odnosno $B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

Vektor normala na površi u nekoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ su

$$\vec{n}_1=(2x-1,\ 2y,\ 2z)$$
$$\vec{n}_2=(2x,\ 2y-1,\ 2z)$$

Pokažimo da su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ normalni

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=4x^2-2x+4y^2-2y+4z^2=\underbrace{2(x^2-x+y^2+z^2)}_{\text{M leži na prvoj sferi}}+\underbrace{2(x^2+y^2-y+z)^2}_{\text{M leži na drugoj sferi}}=0 \quad \ldots(*)$$

Tačka M leži na presječnoj liniji sfera, te njene koordinate zadovoljavaju jednačine $x^2+y^2+z^2=x$ i $x^2+y^2+z^2=y$.

Iz ovog (*) slijedi da su date površi ortogonalne.

(#) Pokazati da sve tangentne ravni na površ

$$z = x\, f\left(\frac{y}{x}\right)$$

prolaze kroz stalnu tačku.

Rj. Ako je površ data jednačinom $z = f(x,y)$ tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$$ vektor normale $\vec{n}$ na površ.

U našem slučaju

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' = f\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y\,(-1)\,x^{-2} =$$

$$= f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{n} = (A, B, C)\\ A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0\end{array}}$$

Jednačina tangentne ravni kroz neku tačku $M(x_1, y_1, z_1)$ date površi je

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right](x-x_1) + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)(y-y_1) + (-1)(z-z_1) = 0$$

Sad želimo iskoristiti činjenicu da je $z_1 = x_1 f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right]x + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)y - z +$$

$$+\underbrace{(-x_1) f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}_{=-z_1} + y_1 f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - y_1 f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + z_1 = 0$$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right]x + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)y - z = 0$$

tangentna ravan na datu površ

Odavde vidimo da sve tangentne ravni prolaze kroz koordinatni početak.

Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u\sin v,\ u\cos v,\ v)$$

a) Naći prvu kvadratnu formu površi.

b) Na površi je zadan krivolinijski trougao

$$0 \le u \le \operatorname{sh} v, \quad 0 \le v \le v_0$$

Izračunati površinu, dužine strana i uglove trougla.

Rj:

a) Prva kvadratna forma površi je

$$F_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

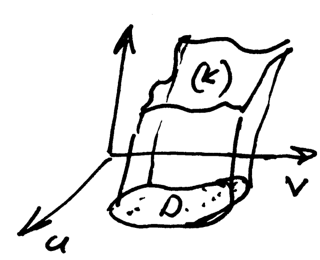
$$E = (\vec{r}\,'_u)^2, \quad F = (\vec{r}\,'_u \cdot \vec{r}\,'_v), \quad G = (\vec{r}\,'_v)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}\,'_u &= (\sin v,\ \cos v,\ 0) \\ \vec{r}\,'_v &= (u\cos v,\ -u\sin v,\ 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} E &= 1 \\ F &= 0 \\ G &= 1+u^2 \end{aligned}$$

Prva kvadratna forma je

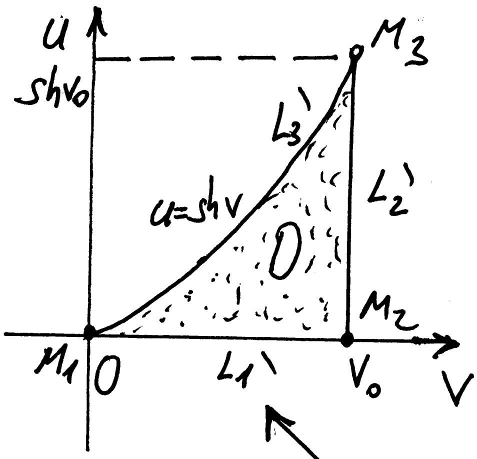
$$F_1 = ds^2 = du^2 + (1+u^2)\,dv^2$$

b) Površinu dijela površi računamo po formuli:



$$P = \iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

Oblast D nije teško skicirati



ortogonalne projekcije stranica trougla

$$D: \begin{cases} 0 \le u \le \operatorname{sh} v \\ 0 \le v \le v_0 \end{cases}$$

U našem slučaju je

$$P = \iint_D \sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \int_0^{v_0} dv \int_0^{\operatorname{sh} v} \sqrt{1+u^2}\,du \stackrel{(*)}{=}$$

$$\int \sqrt{1+u^2}\,du = \text{ZA VJEŽBU} \ldots = \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

$$\int_0^{\operatorname{sh} v} \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}\,\Big|_0^{\operatorname{sh} v} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^{\operatorname{sh} v} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sh} v\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 v} + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{sh} v+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 v}\right) =$$

(Znamo da je $1+\operatorname{sh}^2 v = \operatorname{ch}^2 v$)

$\operatorname{ch} v \ge 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sh} v\,|\operatorname{ch} v| + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sh} v + \operatorname{ch} v)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sh} v\cdot\operatorname{ch} v + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sh} v + \operatorname{ch} v)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_0^{v_0}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sh} v+\operatorname{ch} v)\right)dv = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{v_0}\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v\,dv}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{v_0}\ln(\operatorname{sh} v+\operatorname{ch} v)\,dv}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{v_0}\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{v_0}\operatorname{sh} v\,d(\operatorname{sh} v) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 v\,\Big|_0^{v_0} = \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 v$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = e^x$$

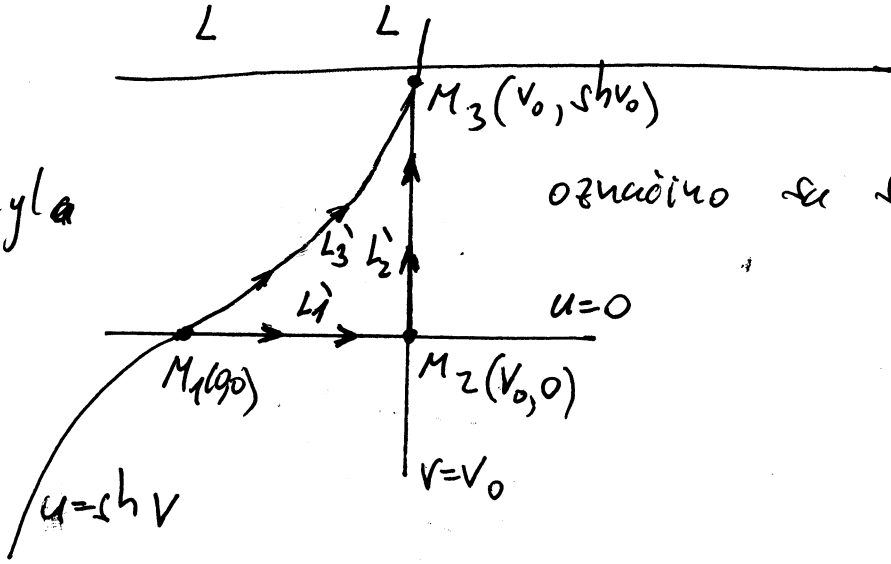
$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{v_0} \ln(e^v)\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{v_0} v\,dv = \frac{1}{4}v^2\Big|_0^{v_0} = \frac{1}{4}v_0^2$$

Prema tome $$P = \frac{1}{4}\left(v_0^2 + sh^2 v_0\right)$$ tražena površina

Dužina luka L se računa po obrascu

$$s = \int_L ds = \int_L \sqrt{du^2 + (1+u^2)\,dv^2}$$

Dužine
Stranica trougla označimo sa s_1, s_2 i s_3



$$s_1 = \int_{L_1} ds = \int_{L_1}\sqrt{du^2+(1+u^2)dv^2} = \int_0^{v_0} dv = v_0$$

$$s_2 = \int_{L_2}\sqrt{du^2+(1+u^2)\,dv^2} = \left| \begin{matrix} L_2:\ v=v_0 \\ dv=0 \end{matrix} \right| = \int_0^{shv_0} du = sh\,v_0$$

$$s_3 = \int_{L_3}\sqrt{du^2+(1+u^2)dv^2} = \left| \begin{matrix} u=sh\,v \\ du = ch\,v\,dv \\ du^2 = ch^2 v\,dv^2 \end{matrix} \right| = \int_0^{v_0}\sqrt{ch^2 v + 1 + sh^2 v}\,dv =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{znamo da} \\ 1+sh^2 v = ch^2 v \end{matrix} \right| = \sqrt{2} \int_0^{v_0} ch\, v \, dv = \sqrt{2}\, sh\, v_0$$

Dužine strana krivoliniskog trougla na datoj površini su

$$s_1 = v_0, \quad s_2 = sh\, v_0, \quad s_3 = \sqrt{2}\, sh\, v_0$$

Jednačine stranica krivoliniskog trougla su

$L_1: \quad \vec{r}_1 = (0, 0, v), \quad 0 \le v \le v_0$

$L_2: \quad \vec{r}_2 = (u \sin v_0,\ u \cos v_0,\ v_0), \quad 0 \le u \le sh\, v_0$

$L_3: \quad \vec{r}_3 = (sh\, v \sin v,\ sh\, v \cos v,\ v), \quad 0 \le v \le v_0$

Presječna tačka stranica L_1 i L_2 je $M_1(v_0, 0)$, stranica L_1 i L_3 je $M_2(0,0)$ i L_2 i L_3 je $M_3(v_0, sh\, v_0)$

Stoga je

$$\cos\varphi_1 = \left. \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{|\dot{\vec{r}}_1| |\dot{\vec{r}}_2|} \right|_{M_1} = \overset{\text{za}}{\text{vježbu}} = 0$$

$$\cos\varphi_2 = \left. \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_3}{|\dot{\vec{r}}_1| |\dot{\vec{r}}_3|} \right|_{M_2} = \ldots \overset{\text{za}}{\text{vježbu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left. \frac{\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_3}{|\dot{\vec{r}}_2| \cdot |\dot{\vec{r}}_3|} \right|_{M_3} = \cos\varphi_3$$

i $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{4}$ traženi uglovi